数理解析研究所講究録
877巻 1994年 62-72

Projective Indecomposable Modules of $SL(2,p^2)$

大阪市大・理 奥山哲郎 (Tetsuro Okuyama)

Abstract. We discuss the relationship between the principal p-block algebra B of $SL(2,p^2)$ and its Brauer correspondent b in terms of derived categories. We give the quiver presentations of the blocks and construct a partial tilting complex over b. We hope our complex can be completed to give a derived equivalence between B and b.

§1. 序

標数 $p>0$ の代数的閉体 k 上の有限群 G の群環を kG とする。kG の block algebra B の考察において、p-local subgroups の B の Brauer 対応子との関係を調べることが重要で、そのための理論が作り上げられてきた。特に、B の defect group D が可換のとき $kN_G(D)$ の Brauer 対応子 b は B と密接な関係があると期待されている。80年代半ば以降、Rickard, Broué らの研究を通して derived category の理論が有限群の表現論に応用されはじ

め、興味深い道具として注目されている。Broué は次の問題を提起している。

<u>問題</u>（Broué [2]）．Dが可換のとき，Bとbは derived equivalent か？

肯定的に解ける証拠があるようには（少くとも私には）見えないが、この問題の周辺を考察することは十分以上に意味があると思う。現在、肯定的に解かれている群の類は次のものだけである。

(1) G : p-solvable （Dade [3]）

(2) D : cyclic （Rickard [5]）

(3) $p=2$, $D=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ （Rickard ; Erdmann）

'93下田の集会で、$SL(2,3^2)$ $(p=3)$, $SL(2,2^3)$ $(p=2)$ の principal blocks について確めたことを報告した。今回の講演では，$SL(2,p^2)$ $(p\geq 5)$ の principal block について考察する。残念ながら最終結果に至っていないが途中経過として報告する。

§2. $SL(2,p^2)$ の projectives

$G=SL(2,p^2)$ とし，Bをその principal block algebra とする。kGの projective indecomposables , simples はよく調べられている。

ここでは、B（の basic algebra）の quiver 表示を与えておく。

simple kG-modules は $\{(\lambda,\mu);\ 0\leq\lambda,\mu\leq p-1\}$ で parametrize され、$(\lambda,\mu)\in B \iff \lambda+\mu$: even, $(\lambda,\mu)\neq(p-1,p-1)$ である。B の basic algebra の quiver 表示は次で与えられる（点も (λ,μ) と書く）。

$\tilde{\lambda}=p-2-\lambda$ とおく。(λ,μ) と矢で結ばれるのは次に限る。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(\tilde{\lambda},\mu-1) \arrow[dr, dash] & & (\lambda-1,\tilde{\mu}) \\
& (\lambda,\mu) \arrow[ur, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(\lambda+1,\tilde{\mu}) & & (\tilde{\lambda},\mu+1)
\end{tikzcd}
$$

（成分に -1, p が表れるときは消す
図の — は $\rightleftarrows$ を意味する）

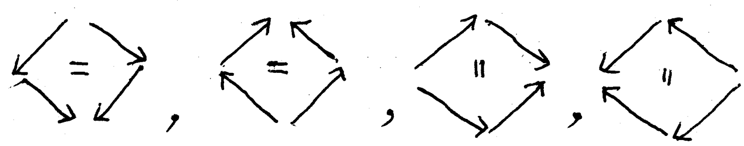
上図の4端点は一致することがあり、それは

$(\lambda,\mu)=(\frac{p-1}{2},\frac{p-1}{2})$ のとき　$(\tilde{\lambda},\mu-1)=(\frac{p-3}{2},\frac{p-3}{2})=(\lambda-1,\tilde{\mu})$

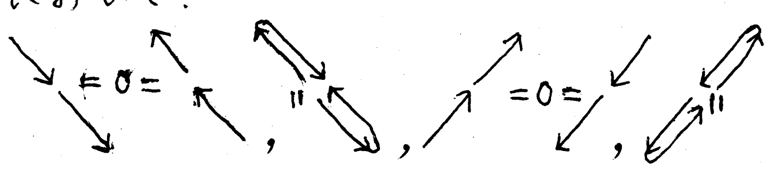
$(\lambda,\mu)=(\frac{p-3}{2},\frac{p-3}{2})$ のとき　$(\tilde{\lambda},\mu+1)=(\frac{p-1}{2},\frac{p-1}{2})=(\lambda+1,\tilde{\mu})$ である。

relations

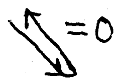
(1)
$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (\lambda,\mu) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(\lambda+1,\tilde{\mu}) \arrow[dr, dash] & & (\tilde{\lambda},\mu+1) \arrow[dl, dash] \\
& (\tilde{\lambda}-1,\tilde{\mu}-1) &
\end{tikzcd}
$$
において、



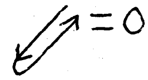
(2)
$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(\tilde{\lambda},\mu-1) \arrow[dr, dash] & & (\lambda-1,\tilde{\mu}) \\
& (\lambda,\mu) \arrow[ur, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(\lambda+1,\tilde{\mu}) & & (\tilde{\lambda},\mu+1)
\end{tikzcd}
$$
において、



(3) $(\lambda,p-1)$ — $(\tilde{\lambda},p-2)$ において、

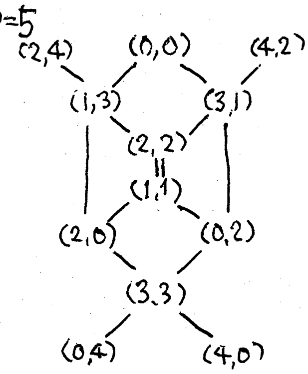


$(p-1,\mu)$ — $(p-2,\tilde{\mu})$ において

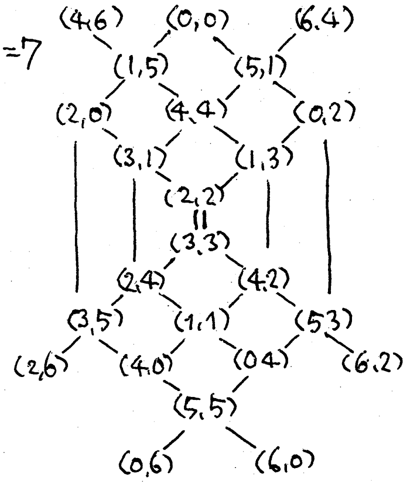


以上 Andersen, Jørgensen, Landrock [1] を参考にして計算した。

例　$p=5$



$p=7$



§3.　$SL(2,p^2)$ の Sylow normalizer

P を $G=SL(2,p^2)$ の Sylow p-subgroup，$H=N_G(P)$ とし，b を kH の principal block algebra とする。simple kH-modules は $\mathbb{Z}/(p^2-1)$ で parametrize され，$\tau\in\mathbb{Z}/(p^2-1)$ について，$\tau\in B \Leftrightarrow \tau$: even である。$b$ は basic で，その quiver 表示は次で与えられる。（点も $\tau\in\mathbb{Z}/(p^2-1)$ で書き，mod p^2-1 で考える）　τ と矢で結ばれるのは次に限る。

$$\begin{tikzcd} \tau-2p \arrow[dr] & & \tau-2 \arrow[dl] \\ & \tau \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \tau+2 & & \tau+2p \end{tikzcd}$$

relations

(1)
$$\begin{tikzcd} & \tau \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \tau+2 \arrow[dr] & & \tau+2p \arrow[dl] \\ & \tau+2+2p & \end{tikzcd}$$
において，
$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "="] & \\ \cdot \arrow[dr] & & \cdot \arrow[dl] \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} & \tau \arrow[dl] \\ \tau+2 \arrow[d, dotted] & \\ \tau+2p & \end{tikzcd} =0, \qquad \begin{tikzcd} \tau \arrow[d] \\ \tau+2p \arrow[d, dotted] \\ \tau+2p^2=\tau+2 \end{tikzcd} =0$$

あとのために記号を定めておく。$N_G(P)=CP$，$C\cap P=1$ と分解できる。kC において 1 を原始巾等元の和 $1=\sum_{\tau\in\mathbb{Z}/(p^2-1)} e(\tau)$ と書く。$J(kP)\setminus J(kP)^2$ の元 α，β を上手にとると，

$e(\tau)\alpha = e(\tau)\alpha e(\tau+2) = \alpha e(\tau+2)$, $e(\tau)\beta = e(\tau)\beta e(\tau+2p) = \beta e(\tau+2p)$

さらに，$\alpha\beta=\beta\alpha$, $\alpha^p = 0 = \beta^p$ となる。上述の quiver 表示，relations はこれから導かれる。

$0 \leq \tau \leq p^2-2$ を p-進展開 $\tau = \lambda + \mu p$ $(0 \leq \lambda, \mu \leq p-1)$ することによって，$\mathbb{Z}/(p^2-1) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{(\lambda,\mu) ; 0 \leq \lambda, \mu \leq p-1, (\lambda,\mu) \neq (p-1,p-1)\}$ となる。この対応で $\tau \leftrightarrow (\lambda,\mu)$ のとき，τ のかわりに (λ,μ) の表示を使うことにするが，$(\lambda,\mu) \in b \Leftrightarrow \lambda+\mu$: even である。

さらに，上の式から

$e(\lambda,\mu)\alpha = \alpha e(\lambda+2,\mu)$, $e(\lambda,\mu)\beta = \beta e(\lambda,\mu+2)$ となる。

§4. Complex の構成

§3 の記号のもとで，b 上のある complex を構成する。未だ成功していないが，目標は次のことである。

b 上の projective modules の bounded complex T^*，つまり $T^* \in K^b(\text{proj-}b)$ で

(1) $\mathrm{Hom}(T^*, T^*[n]) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

(2) T^* は $K^b(\text{proj-}b)$ を生成する。

(3) $\mathrm{End}(T^*) \simeq B$ (の basic algebra) をみたすものを作りたい。Rickard [4] により，このような T^* があれば，B と b が derived equivalent となる。

(1) の条件を check するのに，次の事実はほとんど自明のこ

とであるが，場合によって有効となる。

<u>補題</u>. Aを一般の k-algebra，X^*，$Y^* \in K^b(\text{proj-}A)$ とする。
$\mathrm{Hom}(X^*, Y^*) \neq 0$ であれば，

(1) $\exists n \in \mathbb{Z}$ s.t. $\mathrm{Hom}(X^{(n)}, H^n(Y^*)) \neq 0$

(2) Aが self-injective であれば，$\exists m \in \mathbb{Z}$ s.t. $\mathrm{Hom}(H^m(X^*), Y^{(m)}) \neq 0$

ここで，$X^{(n)}$，$Y^{(m)}$ はそれぞれ X^*，Y^* の n 次，m 次の項の加群，$H^l(\ )$ は l 次の homology 加群を表す。

b上のいくつかの complex を次に定義するが，記号を約束しておく。$\langle\lambda,\mu\rangle = e(\lambda,\mu)b$ （(λ,μ)に対応する projective indecomp.）とおく。これらの間の写像を§3のα，βなどを乗ずることで表す。直和のときはその行列表示を書く。また，各$\langle\lambda,\mu\rangle$に対し，

$$\deg\langle\lambda,\mu\rangle = \frac{1}{2}(\lambda+\mu) \qquad \lambda,\mu : \text{even のとき}$$
$$= \frac{1}{2}(\lambda+\mu)+1 \qquad \lambda,\mu : \text{odd のとき}$$

とおく。

次の complex において，$\langle\lambda,\mu\rangle$ は $\deg\langle\lambda,\mu\rangle$ 次の項におき，書かれていない項は0である。いくつかの complex について，その homology 加群の組成因子を simple modules (λ,μ) を用いて記しておく。特に記さないが，各$\langle\lambda,\mu\rangle$ は $\lambda+\mu = \text{even}$ のもののみを扱かっている。

(1) $0 \leq \lambda, \mu \leq p-3$, $(\lambda, \mu) \neq (p-3, p-3)$

$X(\lambda,\mu)^*$ $\quad \langle \lambda+2, \mu+2 \rangle \xrightarrow[(\beta,\alpha)]{} \langle \lambda+2, \mu \rangle \oplus \langle \lambda, \mu+2 \rangle \xrightarrow[\binom{\alpha}{-\beta}]{} \langle \lambda, \mu \rangle$

$H^*(X(\lambda,\mu)^*)$ $\quad (\lambda+2, \mu+2)$, $(\lambda, \mu+2) \oplus (\lambda+2, \mu)$, (λ, μ)

(2) $0 \leq \lambda, \mu \leq p-5$

$Y(\lambda)^*$ $\quad \langle \lambda+3, p-2 \rangle \xrightarrow[(\beta^{\frac{p-1}{2}},\alpha)]{} \langle \lambda+2, p-1 \rangle \oplus \langle \lambda+1, p-2 \rangle \xrightarrow[\binom{\alpha}{-\beta^{\frac{p-1}{2}}}]{} \langle \lambda, p-1 \rangle$

$H^*(Y(\lambda)^*)$

$$\begin{matrix} (\lambda+3,1) & & (\lambda+1,1) & & (\lambda+2,p-1) & & (\lambda,p-1) \\ & & & \oplus & (\lambda+3,1) & & (\lambda+1,1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\lambda+3,p-2) & , & (\lambda+1,p-2) & & (\lambda+3,p-4) & , & (\lambda+1,p-4) \end{matrix}$$

$Z(\mu)^*$ $\quad \langle p-2, \mu+3 \rangle \xrightarrow[(\beta,\alpha^{\frac{p-1}{2}})]{} \langle p-2, \mu+1 \rangle \oplus \langle p-1, \mu+2 \rangle \xrightarrow[\binom{\alpha^{\frac{p-1}{2}}}{-\beta}]{} \langle p-1, \mu \rangle$

$H^*(Z(\mu)^*)$: $Y(\lambda)^*$ の左右を入れかえ，λをμにとりかえる。

(3)

U^* $\quad \langle p-1, p-3 \rangle \oplus \langle p-3, p-1 \rangle \xrightarrow[\binom{\alpha}{-\beta}]{} \langle p-3, p-3 \rangle$

(4)

W^* $\quad \langle p-2, p-2 \rangle \xrightarrow[(\beta^{\frac{p-1}{2}},\alpha^{\frac{p-1}{2}})]{} \langle p-3, p-1 \rangle \oplus \langle p-1, p-3 \rangle$

U^*, W^* の homology 加群は書くことができるが，ここでは省略する。

(5) $0 \leq \lambda, \mu \leq p-3$, $\lambda, \mu \equiv 2 \pmod{4}$

$A(\lambda)^*$ $\langle \lambda+2, 0\rangle \xrightarrow[\alpha]{} \langle \lambda, 0\rangle$ $B(\mu)^*$ $\langle 0, \mu+2\rangle \xrightarrow[\beta]{} \langle 0, \mu\rangle$

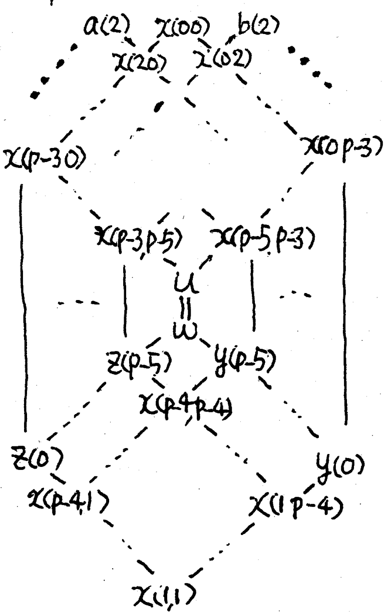
$H^*(A(\lambda)^*)$
$$\begin{array}{cc}
(\lambda, 2) & (\lambda, 0) \\
\vdots & \vdots \\
(\lambda, p-1) & \vdots \\
(\lambda+1, 1) & (\lambda, p-1) \\
\vdots & (\lambda+1, 1) \\
(\lambda+1, p-2) & \vdots \\
(\lambda+2, 0), & (\lambda+1, p-2)
\end{array}$$

$H^*(B(\mu)^*)$: $A(\lambda)^*$ の左右を入れかえ，λをμにかえる。

T_0^*を上に定義したcomplexの直和とする。

命題 (1) $\mathrm{Hom}(T_0^*, T_0^*[n]) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $n \neq 0$

(2) $\mathrm{End}(T_0^*)$ のquiver表示は次のようになる。($x(\lambda,\mu)$, $y(\lambda)$, $z(\mu)$ u, w, $a(\lambda)$, $b(\mu)$ はそれぞれ $X(\lambda,\mu)^*$, $Y(\lambda)^*$, $Z(\mu)^*$, U^*, W^*, $A(\lambda)^*$, $B(\mu)^*$ に対応する $\mathrm{End}(T_0^*)$ の simples を表す。)



(1)の事実は，補題を用いて比較的楽にCheckできる。$X(\lambda,\mu)^*$, $Y(\lambda)^*$, $Z(\mu)^*$ のn次のhomology加群の組成因子にあらわれるsimpleは n以下の次数をもつものだけである。上述の各complex P^* Q^* について $\mathrm{Hom}(P^*, Q^*[n])$

$\neq 0$ を確めるのに，補題が適用できない組合せはごくわずかで，それらは直接の計算で確める。また $\dim Hom_b(\langle\lambda,\mu\rangle,\langle\lambda',\mu'\rangle) = 2 + \delta_{\lambda\lambda'}\cdot\delta_{\mu\mu'}$ から，$Hom(P^*, Q^*)$ の次元はとても少さく $End(T_0^*)$ の生成元が見つかり quiver 表示が得られる。

§5. 分解

§4で定義した T_0^* は b の tilting complex ではない。命題の図から見てとれるように，（p=5, 7 の §2 の例を参考にして），先に述べた目標のためには，下の正方形の下側につけるべき complex が足りない。T_0^* は $K^b(\text{proj-}b)$ を生成していないということである。$End(T_0^*)$ の quiver 表示は，B のそれの一部分とぴったり一致している。その部分についての relations も一致していると思う（計算は完了していない）。足りない complex は $1 \leq \lambda, \mu \leq p-3$, $\lambda, \mu \equiv 1 \pmod 4$

$C(\lambda)^*$ $\langle\lambda+2, 1\rangle \xrightarrow[\alpha]{} \langle\lambda, 2\rangle$ $D(\mu)^*$; $\langle 1, \mu+2\rangle \xrightarrow[\beta]{} \langle 1, \mu\rangle$

$p \equiv 3 \pmod 4$ のときは，さらに

$$\langle p-2, 1\rangle \xrightarrow[\alpha^{\frac{p-1}{2}}]{} \langle p-1, 0\rangle \quad , \quad \langle 1, p-2\rangle \xrightarrow[\beta^{\frac{p-1}{2}}]{} \langle 0, p-1\rangle$$

に とても"似ている"ものである（はずである）。

これら自身では，T_0^* に直和すると最初の条件(1)がみたされなくなる。

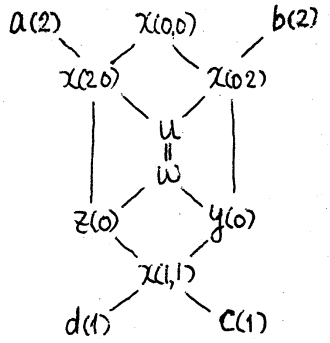
p=5 のときは 何とかなりそうである。$C(1)^*$, $D(1)^*$ とし

て、それぞれ，

$$\langle 3,1\rangle \xrightarrow{(\beta,-\alpha)} \langle 2,4\rangle\oplus\langle 1,1\rangle \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & -\alpha^4\end{pmatrix}} \langle 0,4\rangle\oplus\langle 2,4\rangle \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^4 & 0\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}} \langle 2,2\rangle\oplus\langle 0,4\rangle \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & -\alpha^4\end{pmatrix}} \langle 0,2\rangle\oplus\langle 2,2\rangle \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^4 & 0\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}} \langle 2,0\rangle\oplus\langle 0,2\rangle \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & -\alpha^4\end{pmatrix}} \langle 0,0\rangle\oplus\langle 2,0\rangle \xrightarrow{\begin{pmatrix}0\\ -\alpha\end{pmatrix}} \langle 0,0\rangle$$

と，左右を入れかえ，βとαをとりかえたものととる。ただし $\langle 3,1\rangle$ を3次の項におく。

T_0^* に上の2つの complex を直和した complex を T^* とおけば (p=5のとき) T^* は b 上の tilting complex となり $\mathrm{End}(T^*)$ の quiver 表示は



となる。§2の例 (p=5) の図と一致している。関係式の check はとにかく計算するだけなので，見落とし，間違いが生じている可能性もあるが，これも一致していると確信している。

必要な complex を構成するのに，T_0^*は比較的"自然"に思いついたものであるので，これに足りない complex をつけようと考えている。しかし，T_0^*が、虫が良すぎたのかもしれない。

以上、とにかく、数学ではなくて，計算だけの途中経過を報告させてもらった。最後に弁解を書かせてもらう。

Brouéの問題を考えるには、あまりにも例が少ない。Dがcyclicのときの Rickardの議論も興味深く、発展させる余地があると思う。$SL(2,p^2)$で考えるのも、$SL(2,p^n)$までまず確めたい，それから一般的事実を引きだしたいと思ってである。先は遠いが。

参考文献

[1]. Andersen, Jørgensen, Landrock ; The projective indecomposable Modules of $SL(2,p^n)$, Proc. London M. S. (3) 46 (1983)

[2] Broué, Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées, Astérisque 181-182 (1990)

[3] Dade, A correspondence of characters, Proc. Symp. Pure Math. 37 (1980)

[4] Rickard, Morita theory for derived categories, J. London M. S. (2) 39 (1989)

[5] Rickard, Derived categories and stable equivalence, J. Pure & Appl. Alg. 61 (1989)